Corrigé Bac Blanc Jour 1

Exercice 1

Partie A

1. D'après l'énoncé :
$$\mathrm{p}(A) = 0{,}2, \qquad \mathrm{p}(M) = 0{,}6, \qquad \mathrm{p}_A(M) = 0{,}5.$$

2. (a)
$$\mathrm{p}(A \cap M) = \mathrm{p}(A)\,\mathrm{p}_A(M) = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1.$$
Interprétation : 10% des usagers ont un abonnement annuel **et** utilisent l'application mobile.

   (b) D'après la formule des probabilités totales :
$$\mathrm{p}(A \cap \overline{M}) = \mathrm{p}(A) - \mathrm{p}(A \cap M) = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1.$$

3. (a) D'après la formule des probabilités totales :
$$\mathrm{p}(\overline{A} \cap M) = \mathrm{p}(M) - \mathrm{p}(A \cap M) = 0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}5.$$

   (b)
$$\mathrm{p}_{\overline{A}}(M) = \frac{\mathrm{p}(\overline{A} \cap M)}{\mathrm{p}(\overline{A})} = \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625.$$
Donc :
$$\mathrm{p}_A\big(\overline{M}\big) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{p}_{\overline{A}}\big(\overline{M}\big) = 1 - 0{,}625 = 0{,}375.$$

4. **Valeurs à placer dans l'arbre :**
$$\mathrm{p}(A) = 0{,}2,\ \mathrm{p}(\overline{A}) = 0{,}8,\ \mathrm{p}_A(M) = 0{,}5,\ \mathrm{p}_A\big(\overline{M}\big) = 0{,}5,\ \mathrm{p}_{\overline{A}}(M) = 0{,}625,\ \mathrm{p}_{\overline{A}}\big(\overline{M}\big) = 0{,}375.$$

5.
$$\mathrm{p}_M(A) = \frac{\mathrm{p}(A \cap M)}{\mathrm{p}(M)} = \frac{0{,}1}{0{,}6} \approx 0{,}1667.$$
Interprétation : parmi les usagers utilisant l'application mobile, environ 16,67% ont un abonnement annuel.

6. L'affirmation annonce « moins de 20% ». Or $\mathrm{p}_M(A) \approx 0{,}1667 < 0{,}20$. **L'affirmation est vraie.**

Partie B

1. D'après la définition, Y peut prendre les valeurs : $0, 1, 2, 3$.
2. L'événement $\{Y = 3\}$ correspond à l'événement $A \cap M$.
   L'événement $\{Y = 2\}$ correspond à l'événement $A \cap \overline{M}$.
   L'événement $\{Y = 1\}$ correspond à l'événement $\overline{A} \cap M$.
   L'événement $\{Y = 0\}$ correspond à l'événement $\overline{A} \cap \overline{M}$.

3. On utilise les probabilités obtenues en Partie A :

$$p(A \cap M) = 0{,}1, \quad p(A \cap \overline{M}) = 0{,}1, \quad p(\overline{A} \cap M) = 0{,}5.$$

On en déduit :

$$p(\overline{A} \cap \overline{M}) = 0{,}8 \times 0{,}375 = 0{,}3.$$

Ainsi :

$$p(Y = 3) = p(A \cap M) = 0{,}1,$$
$$p(Y = 2) = p(A \cap \overline{M}) = 0{,}1,$$
$$p(Y = 1) = p(\overline{A} \cap M) = 0{,}5,$$
$$p(Y = 0) = p(\overline{A} \cap \overline{M}) = 0{,}3.$$

Tableau de la loi de Y :

y	0	1	2	3
$p(Y = y)$	0,3	0,5	0,1	0,1

4. Espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}1 = 1.$$

Interprétation : sur un grand nombre d'usagers, le montant moyen de réduction accordé par usager est de **1 euro**.

Partie C – Loi binomiale

1. **Étude pour $n = 15$.**

(a) Chaque usager correspond à un « succès » (être abonné annuel) de probabilité $p = 0{,}20$, et les choix sont indépendants... (phrase du cours...) Ainsi,

$$X \sim \mathcal{B}(15, 0{,}20).$$

(b)

$$p(X = 3) = \binom{15}{3}(0{,}2)^3(0{,}8)^{12} \approx 0{,}2501.$$

(c)

$$p(X \geq 5) \approx 0{,}1642.$$

2. **Recherche de n.**

(a)

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (0{,}8)^n.$$

(b) On veut $1 - (0{,}8)^n \geq 0{,}99$, soit $(0{,}8)^n \leq 0{,}01$. En utilsant le logarithme népérien :

$$n \ln(0{,}80) \leq \ln(0{,}01).$$

Comme $\ln(0{,}80) < 0$, on obtient

$$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}6377.$$

Donc le plus petit entier convenable est $\boxed{n = 21}$.

Exercice 2

Partie A

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x).$$

1. — **Limite en 0 :** On sait que par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0} x^2\ln(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to0} x = 0$, donc par somme de limites :
$$\lim_{x\to0} f(x) = 1.$$
   — **Limite en $+\infty$:** en écrivant $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, on a :
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} -2\ln(x) = -\infty,$$
   puis $\lim\limits_{x\to+\infty}(1 - 2\ln(x)) = -\infty$ et enfin par produit de limites :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

2. Pour tout réel de l'intervalle $]0;+\infty[$,
$$f'(x) = 2x - 4x\ln(x) - 2x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x).$$

3. Puisque $x \geq 0$, le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $\ln(x)$. On sait que $\ln(x) < 0$ sur $[0;1[$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0;1[$ et que $\ln(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1;+\infty[$.
   La fonction f est donc :
   — croissante sur $[0;1]$ de 1 à $f(1) = 1 + 1 - 2\times1\times0 = 2$;
   — décroissante sur $[1;+\infty[$ de 2 à moins l'infini.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4. Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante. De plus, $0 \in]-\infty;2]$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α, avec $\alpha \in]1;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   Sur l'intervalle $]0;1]$, $f(x) > 1$ donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

   Donc l'équation a une unique solution sur $]0;+\infty[$.

   À la calculatrice $f(1{,}89) \simeq 0{,}02 > 0$ et $f(1{,}90) \simeq -0{,}02 < 0$
   donc $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.

5. D'après ce qui précède

x	0		α		$+\infty$
Signe de f	||	$+$	0	$-$	

Partie B :

1)

$$f''(x) = (-4\ln(x)) + (-4x) \times \frac{1}{x} = -4\ln(x) - 4 = -4(\ln(x)+1) \quad \text{sur } [1;\alpha].$$

Or sur $[1;\alpha], \ln(x) \geq 0$ donc $\ln(x) + 1 \geq 0$, ainsi

$$-4(\ln(x)+1) \leq 0,$$

La fonction f est donc concave sur $[1;\alpha]$.

2. a. La droite (AB) a pour équation réduite :

$$\frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \iff \frac{y-2}{x-1} = \frac{0-2}{\alpha-1} \iff y = \frac{-2(x-1)}{\alpha-1} + 2$$

$$\iff y = \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2}{\alpha-1} + \frac{2\alpha-2}{\alpha-1} \iff y = \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2\alpha}{\alpha-1}$$

Remarque : Une autre démarche aurait consisté à calculer dans un premier temps son coefficient directeur avec la formule $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ *puis utiliser un des deux points A ou B pour déterminer ensuite l'odonnée à l'origine.*

b. Sur l'intervalle $[1;\alpha]$, la fonction f est concave, donc sa courbe représentative est située au-dessus de toute sécante, donc au-dessus du segment $[AB]$.

On en déduit que sur $[1;\alpha]$, on a :

$$g(x) \geq -\frac{2}{\alpha-1}x + \frac{2\alpha}{\alpha-1}.$$

Exercice 3

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois. On a donc $u_0 = 0{,}1$.

1. Augmenter de 60 %, c'est multiplier par $1 + \frac{60}{100} = 1{,}6$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}6$.
   La forme explicite d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est :
   $$u_n = u_0 \times q^n,$$
   donc $u_n = 0{,}1 \times 1{,}6^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Comme $1{,}6 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}6^n = +\infty$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}1 \times 1{,}6^n = +\infty$, et donc
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

3. On résout l'inéquation $u_n > 0{,}4$:

$$\begin{aligned} u_n > 0{,}4 &\iff 0{,}1 \times 1{,}6^n > 0{,}4 \\ &\iff 1{,}6^n > 4 \\ &\iff \ln(1{,}6^n) > \ln(4) \\ &\iff n \ln(1{,}6) > \ln(4) \\ &\iff n > \frac{\ln(4)}{\ln(1{,}6)}. \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(4)}{\ln(1{,}6)} \approx 2{,}95$, donc le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0{,}4$ est 3.

4. $u_3 > 0{,}4$ signifie que le nombre d'insectes dépasse 400000 dès le 3e mois ; selon ce modèle le milieu naturel n'est donc pas préservé.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation. Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$v_0 = 0{,}1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad v_{n+1} = 1{,}6v_n - 1{,}6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1.
$$v_1 = 1{,}6v_0 - 1{,}6v_0^2 = 1{,}6 \times 0{,}1 - 1{,}6 \times 0{,}1^2 = 0{,}144.$$

Le nombre d'insectes au bout d'un mois est donc égal à 144000.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2.$$

(a) On résout l'équation $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 1{,}6x - 1{,}6x^2 = x \\ &\iff 0{,}6x - 1{,}6x^2 = 0 \\ &\iff x\,(0{,}6 - 1{,}6x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 0{,}6 - 1{,}6x = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{0{,}6}{1{,}6} \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Les deux solutions appartiennent à $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$; donc l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions dans cet intervalle : 0 et $\dfrac{3}{8}$.

(b)
$$f'(x) = 1{,}6 - 3{,}2x = 1{,}6\,(1 - 2x)\,.$$

Pour $x \in \left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$, on a $1 - 2x \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$ et ainsi f est croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

3. (a) On va montrer par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}_n : \quad 0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation**
  On a $v_0 = 0{,}1$ et $v_1 = 0{,}144$; donc $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. La propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  Comme f est croissante sur $\left[0 \,;\, \dfrac{1}{2}\right]$, on a :
  $$f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right).$$
  Or $f(0) = 0$, $f(v_n) = v_{n+1}$, $f(v_{n+1}) = v_{n+2}$ et
  $$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}6 \times \frac{1}{2} - 1{,}6\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}4.$$
  Donc
  $$0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}.$$
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire ; donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

(b) On sait que :
- $v_n \leqslant v_{n+1}$ pour tout n, donc la suite (v_n) est croissante ;
- $v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout n, donc la suite (v_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

La suite (v_n) est croissante et majorée, donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente.
On note ℓ la valeur de sa limite.

(c) La suite (v_n) est croissante et admet pour limite ℓ ; donc pour tout n, on a $v_n \leqslant \ell$. En particulier $v_1 \leqslant \ell$, donc $\ell \geqslant 0{,}1$.
Or comme f est continue sur l'intervalle $[0; \dfrac{1}{2}]$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$, ℓ est solution de l'quation, $f(x) = x$, donc $\ell \in \left\{0, \dfrac{3}{8}\right\}$. Comme $\ell \geqslant 0{,}1$, on a $\ell \neq 0$, donc
$$\ell = \frac{3}{8} = 0{,}375.$$
Pour tout n, on aura donc $v_n \leqslant 0{,}375$; il y aura donc toujours moins de 375000 insectes. Ainsi, selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera préservé.

4. On donne ci-contre la fonction `seuil`, écrite en langage Python.

```
def seuil(a) :
  v=0.1
  n=0
  while v<a :
    v=1.6*v-1.6*v*v
    n=n+1
  return n
```

(a) La fonction `seuil(a)` donne la première (et plus petite) valeur de `n` telle que `v>=a`, c'est-à-dire telle que $v_n \geqslant a$.
On a vu que $v_n \leqslant 0{,}375$ pour tout n ; il n'y a donc pas de valeur de n pour laquelle $v_n \geqslant 0{,}4$. Le programme ne s'arrête donc jamais.

(a) À la calculatrice, on trouve $v_5 \approx 0{,}338 < 0{,}35$ et $v_6 \approx 0{,}358 \geqslant 0{,}35$; donc la valeur renvoyée par `seuil(0.35)` est 6.
Cela signifie qu'à partir du 6e mois, il y aura plus de 350000 insectes.

Exercice 4

1. **Affirmation 1 :**

   On forme une équipe en choisissant **3 filles parmi 18** et **3 garçons parmi 14**. Le nombre d'équipes possibles est donc :
   $$\binom{18}{3} \times \binom{14}{3}.$$
   Calculs :
   $$\binom{18}{3} = \frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2 \times 1} = \frac{4896}{6} = 816, \qquad \binom{14}{3} = \frac{14 \times 13 \times 12}{3 \times 2 \times 1} = \frac{2184}{6} = 364.$$
   Donc
   $$\binom{18}{3} \times \binom{14}{3} = 816 \times 364 = 297024.$$
   Il y a donc $\boxed{297024}$ possibilités.

   L'affirmation 1 est donc **vraie**.

2. **Affirmation 2 :**

   On suppose que, pour tout $x \in]1, +\infty[$,
   $$e^x \leq f(x) \leq e^{2x+1}.$$
   En divisant l'encadrement par $x^2 - 1 > 0$ (pour $x > 1$), on obtient :
   $$\frac{e^x}{x^2-1} \leq \frac{f(x)}{x^2-1} \leq \frac{e^{2x+1}}{x^2-1}.$$
   Or, en utilisant la mise en facteur du terme de plus haut degré pour lever l'indétermination :
   $$\frac{e^x}{x^2-1} = \frac{e^x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}},$$
   $$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$
   donc,
   $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 1.$$
   et de plus, par croissance comparée,
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$
   Donc
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-1} = +\infty$$
   Par comparaison, on en déduit alors :
   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2-1} = +\infty.}$$
   Cette limite n'est donc pas égale à 0. L'affirmation 2 est **fausse**.

3. **Affirmation 3 :**

   On considère h définie sur $]0, +\infty[$ par

$$h(x) = x(\ln x)^2.$$

   On dérive 2 fois :

$$h'(x) = 1 \cdot (\ln x)^2 + x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x$$

   Puis

$$h''(x) = \left(\frac{2\ln x}{x}\right) + \left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2(\ln x + 1)}{x}.$$

   Étude du signe de h''. Pour tout $x > 0$, on a $\frac{2}{x} > 0$. Donc $h''(x)$ est du signe de $\ln x + 1$.
   Or

$$\ln x + 1 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant -1 \iff x \geqslant e^{-1}.$$

   Ainsi :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	0	$+$	

   $\boxed{h''(e^{-1}) = 0}$ et que h'' **change de signe** en $x = e^{-1}$. Donc la convexité change en $x = e^{-1}$: la courbe admet un **point d'inflexion** d'abscisse $\boxed{e^{-1}}$.

   L'affirmation 3 est donc **vraie**.

4. **Affirmation 4 :**

   On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, et qui converge vers un réel ℓ. On affirme que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

   Contre-exemple : Prenons $u_n = \frac{1}{n+1}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0,$$

   donc ici $\ell = 0$.
   Mais

$$v_n = \frac{1}{u_n} = n + 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

   donc l'affirmation 4 est **fausse**.

5. **Affirmation 5 :**
   On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(0) = 0 \quad \text{et pour } x > 0, \quad f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}.$$

   On cherche à savoir si f est continue en 0.

La fonction est continue en 0 si :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

Calculons cette limite :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{x+1}.$$

On sait, par croissance comparée, que :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$$

De plus,

$$\lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{x+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

On obtient donc :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue en } 0.}$$

donc l'affirmation 5 est **vraie**.